



مهدی شاکریان
shakeryan.com

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: تابع دوازدهم درس ۲ قلمچی

۱) اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

روش اول:

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$2x - 3 = t \xrightarrow{x = \frac{t+3}{2}} f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$\rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: با جای‌گذاری $x = 2$ در عبارت داده شده داریم:

$$f(2 \times 2 - 3) = f(1) = 4(2)^2 - 14(2) + 13 = 1 \rightarrow f(1) = 1$$

با بررسی گزینه‌ها، تنها در گزینه «۴» به ازای $x = 1$ خروجی برابر ۱ می‌شود. بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

۲) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند. جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $-1, -7$ (۲) $1, -7$ (۳) $-1, 7$ (۴) $1, 7$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+2} = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 4 = \frac{2x-1}{x+2} + 4$$

$$= \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 7x + 36x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق.۱} \\ x = -7 \text{ ق.۲} \end{cases}$$

۳) اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = [x]$ باشد، بُرد تابع $g \circ f$ کدام است؟ ([علامت جزء صحیح است.)

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\{0, 1\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

به طور کلی $0 \leq u - [u] < 1$ (u عبارتی بر حسب x است)

$$(g \circ f)(x) = g(2x - [2x]) \xrightarrow{0 \leq 2x - [2x] < 1} 0$$

۴) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 6x + 10$ باشد، مساحت ناحیه محدود بین نمودار تابع $f \circ g$ و خط $y = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا تابع $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم:

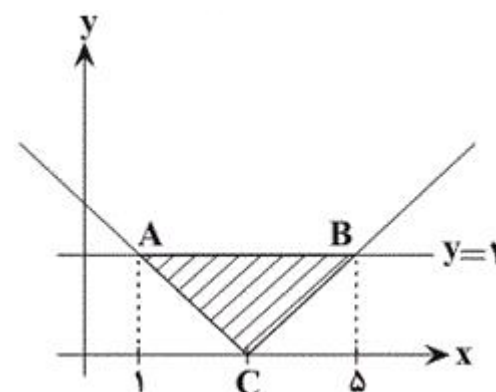
$$y = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 6x + 10 - 1}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

حال نمودار $(f \circ g)(x) = |x-3|$ را با خط $y = 2$ قطع می‌دهیم:

$$\Rightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

مساحت مثلث ABC: $S_{\triangle ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$



۵) اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ، کدام است؟

- ۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ ۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$ ۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$ ۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا f^{-1} را به دست می‌آوریم، برای این منظور، جای مؤلفه‌های اول و دوم را در هر زوج مرتب عوض کنیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

حال با توجه به تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_g\}$$

حال با توجه به دامنه تابع g یعنی $D_g = \{2, 4, 5, 3\}$ ، داریم:

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{4, 5, 6\} \Rightarrow g \circ f^{-1} = \{(4, 1), (5, 3), (6, 2)\}$$

از طرفی برای دامنه حاصل تقسیم دو تابع داریم:

$$D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} - \{x \mid (g \circ f^{-1})(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = \{4, 5\}$$

با مشاهده دامنه توابع گزینه‌ها، به سادگی به جواب گزینه «۱» می‌رسیم. اما برای محاسبه مؤلفه‌های دوم این تابع نیز داریم:

$$\begin{aligned} \frac{g}{g \circ f^{-1}} &= \left\{ \left(4, \frac{g(4)}{g \circ f^{-1}(4)} \right), \left(5, \frac{g(5)}{g \circ f^{-1}(5)} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(4, \frac{2}{1} \right), \left(5, \frac{6}{3} \right) \right\} \Rightarrow \frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(4, 2), (5, 2)\} \end{aligned}$$

⑥ نمودار تابع $y = |x - 3| - 2$ را در راستای محورهای مختصات یک واحد به سمت بالا و چهار واحد به سمت چپ برده، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

پاسخ: گزینه ۱

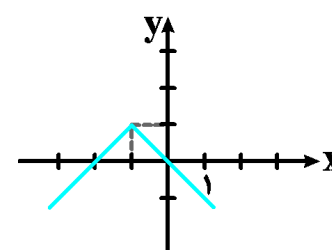
گزینه «۱»

ابتدا با استفاده از انتقال، نمودار جدید را بدست می‌آوریم:

$$y = |x - 3| - 2 \xrightarrow[y \rightarrow (y-1)]{\text{یک واحد به سمت بالا}} y = |x - 3| - 1$$

$$\xrightarrow[x \rightarrow (x+4)]{\text{چهار واحد به سمت چپ}} y = |x + 1| - 1$$

$$\xrightarrow[y \rightarrow (-y)]{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -|x + 1| + 1$$

برای رسم نمودار $y = -|x + 1| + 1$ ، نمودار $y = -|x|$ را یک واحد به بالا و یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

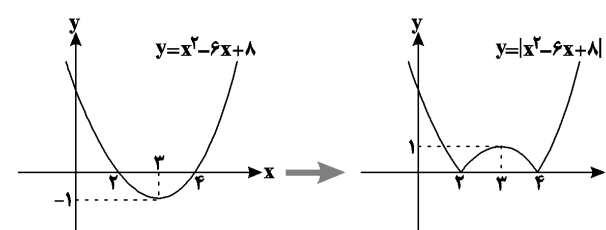
مشاهده می‌کنیم که نمودار فوق از سه ناحیه دوم، سوم و چهارم عبور می‌کند.

⑦ مجموعه تمام مقادیر m ، که به ازای آن‌ها معادله $|x^2 - 6x + 8| = m$ دارای چهار جواب متمایز باشد، کدام است؟

(۴) $0 < m < 1$ (۳) $0 < m < 2$ (۲) $m > 1$ (۱) $m > 0$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»



با توجه به شکل، برای اینکه معادله $|x^2 - 6x + 8| = m$ چهار ریشه متمایز داشته باشد یا به عبارت دیگر خط $y = m$ ، نمودار $y = |x^2 - 6x + 8|$ را در چهار نقطه قطع کند، باید: $0 < m < 1$

۸) اگر $f(x) = 5x - 10$ و $D_f = [-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $f \circ f$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[-1, \frac{9}{5}]$ (۴) $[\frac{9}{5}, 2]$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$D_{f \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$= \{x | -1 \leq x \leq 2, -1 \leq 5x - 10 \leq 2\} = \{x | -1 \leq x \leq 2, \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{12}{5}\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = [-1, 2] \cap [\frac{9}{5}, \frac{12}{5}] = [\frac{9}{5}, 2]$$

۹) اگر دو تابع $f(x) = 3x - 2$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ مفروض باشند، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} \Rightarrow f(g(1)) = \frac{2}{2} = 1$$

حال می‌دانیم $f(g(1)) = 1$ پس داریم:

$$f(g(1)) = 3g(1) - 2 = 1 \Rightarrow 3g(1) = 3 \Rightarrow g(1) = 1$$

۱۰) اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-1}(2x + 3) = g(x + 1)$ باشد، حاصل $(f \circ g)(2)$ کدام است؟ ($D_f = R_f = R$ و $D_g = R$)

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲

$$f^{-1}(2x + 3) = g(x + 1) \Rightarrow f(f^{-1}(2x + 3)) = f(g(x + 1))$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = f(g(x + 1)) \xrightarrow{x=1} (f \circ g)(2) = 5$$

۱۱) اگر $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ و $(f \circ g)(a) = g(2)$ باشد، آن گاه a کدام است؟

۲ (۳

۲ (۱

۵ (۴

۴ (۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه $g(x)$ را بدست می آوریم.

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 2y - 1 = x \Rightarrow g(x) = 2x - 1$$

$$g(a) = 2a - 1 \Rightarrow (f \circ g)(a) = f(2a - 1) = g(2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a - 1} = 2 \times 2 - 1 \Rightarrow 2a - 1 = 9 \Rightarrow a = 5$$